ПОУ «Колледж бизнес-менеджмента, экономики и права»

Дата: 29.04.2020г.
Специальность:
Курс: 2-й
Дисциплина: Математика
Преподаватель: Гаджиева А.Х.

Лекция №3:

Тема: “Логарифмические уравнения. Основные методы их решения”.

План лекции:

1.Разобрать основные методы решения логарифмический уравнений

2.Привести примеры их решения

3. Д/З

В самом начале моей лекции я хотела бы обратить ваше внимание на следующее. При решении логарифмических уравнений применяют преобразования, которые не приводят к потере корней, но могут привести к приобретению посторонних корней. Поэтому проверка каждого из полученных корней обязательна, если нет уверенности в равносильности уравнений. Здесь возможны два подхода:

Проверка путём подстановки полученных решений в *исходное* уравнение.

Нахождение области допустимых значений уравнения (ОДЗ). Тогда корнями могут быть только те числа, которые принадлежат этой области.

В своей лекции я буду использовать оба этих подхода, а ваше право уже самим выбирать, какой лично вам больше нравится. Следует отметить, что при решении логарифмических неравенств возможен только один из них: ОДЗ!

Основные методы решения логарифмических уравнений.

Уравнение, содержащее неизвестное под знаком логарифма или (и) в его основании, называется **логарифмическим уравнением**.

Решение логарифмических уравнений на основании определения логарифма.

Определение логарифма: Логарифмом числа *b* по основанию *a* называется показатель степени, в которую нужно возвести основание *a*, чтобы получить число *b*. Т. е. $\log_a b = c : a^c = b, a > 0, b > 0, a \neq 1.$

Таким образом, применяя его к нашей теме, мы получим следующее:

$\log_a f(x) = c \Rightarrow f(x) = a^c$, при этом $f(x) > 0, a > 0, a \neq 1.$

Пример 1: $\log_4 x = 2,$

$ОДЗ: x > 0,$

$x = 4^2,$

$x = 16.$

Число 16 удовлетворяет ОДЗ, значит 16 – корень исходного уравнения.

Ответ: 16.

Пример 2: $\log_3(2x+1)=2,$

$2x+1=3^2,$

$2x+1=9,$

$x=4.$

Проверка: $\log_3(2\cdot 4+1)=2,$ $\log_3 9=2,$ $2=2$ - верно, значит число 4 – корень исходного уравнения.

Ответ: 4.

Пример 3: $4^{x-3}=5,$

По определению логарифма $x-3=\log_4 5,$ значит $x=3+\log_4 5.$

Ответ: $3+\log_4 5.$

А сейчас мы рассмотрим пример, в котором в основании логарифма уже не число, а выражение, содержащее переменную. Т. е. уравнение будет иметь вид $\log_{g(x)} f(x)=c \Rightarrow f(x)=g(x)^c,$ при этом $f(x)>0, g(x)>0, g(x)\neq 1.$ Хочу отметить особо, что рассуждения НЕ ИЗМЕНИЛИСЬ!

Пример 4: $\log_{x+1}(2x^2+1)=2,$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x^2+1>0, \\ x+1>0, \\ x+1\neq 1, \end{cases} \Rightarrow x\in(-1;0)\cup(0;+\infty).$

$\log_{x+1}(2x^2+1)=2,$

$2x^2+1=(x+1)^2,$

$2x^2+1=x^2+2x+1,$

$x^2-2x=0,$

$x(x-2)=0,$

$x_1=0, x_2=2.$

С учётом ОДЗ получим, что решением данного уравнения является число 2.

Ответ: 2.

Как мы видим, наличие выражения с переменной в основании влияет лишь на ОДЗ, а не на ход рассуждений. Кроме того, данное уравнение можно решать, не прибегая к нахождению ОДЗ, а просто в конце выполнить проверку.

Метод потенцирования.

Под потенцированием понимается переход от равенства, содержащего логарифмы, к равенству, не содержащему их.

$\log_a f(x)=\log_a g(x) \Rightarrow f(x)=g(x)$, где $a>0, a\neq 1, f(x)>0, g(x)>0.$

Пример 5: $\log_2(x^2+7x-5)=\log_2(4x-1),$

$x^2+7x-5=4x-1,$

$x^2 + 3x - 4 = 0,$

$x_1 = 1, x_2 = -4.$

Проверка:

$x = 1 \Rightarrow \log_2(1^2 + 7 \cdot 1 - 5) = \log_2(4 \cdot 1 - 1) \Rightarrow \log_2 3 = \log_2 3$ - верно.

$x = -4 \Rightarrow \log_2((-4)^2 + 7 \cdot (-4) - 5) = \log_2(4 \cdot (-4) - 1) \Rightarrow \log_2(-17) = \log_2(-17)$ - не верно.

Значит, только число 1 является решением исходного уравнения.

Ответ:1.

Если же в основании – выражение с переменной, то рассуждения не меняем! В этом случае уравнение будет иметь вид

$\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$, где $f(x) > 0, g(x) > 0, h(x) > 0, h(x) \neq 1.$

И пример такого уравнения можно разобрать на предыдущем примере 5.

Пример 6: $\log_{2+x}(x^2 + 7x - 5) = \log_{2+x}(4x - 1),$

$x^2 + 7x - 5 = 4x - 1,$

$x^2 + 3x - 4 = 0,$

$x_1 = 1, x_2 = -4.$

Проверка:

$x = 1 \Rightarrow \log_{2+1}(1^2 + 7 \cdot 1 - 5) = \log_{2+1}(4 \cdot 1 - 1) \Rightarrow \log_3 3 = \log_3 3 \Rightarrow 1 = 1$- верно.

$x = -4 \Rightarrow \log_{2-4}((-4)^2 + 7 \cdot (-4) - 5) = \log_{2-4}(4 \cdot (-4) - 1) \Rightarrow \log_{-2}(-17) = \log_{-2}(-17)$ - не верно.

Значит, только число 1 является решением исходного уравнения.

Ответ:1.

ОДЗ для данного уравнения выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} x^2 + 7x - 5 > 0, \\ 4x - 1 > 0, \\ 2 + x > 0, \\ 2 + x \neq 1. \end{cases}$$

Мы видим, что в этом уравнении рациональнее выполнить проверку, а не искать ОДЗ. Но ещё раз повторюсь, что при решении неравенств ОДЗ находить придётся ОБЯЗАТЕЛЬНО.

Рассмотрим пример, который, на первый взгляд, не может относиться к данному типу уравнений.

Пример7: $\log_4(4 + 7x) = \log_4(1 + 5x) + 1.$

Сделаем замену $1 = \log_4 4^1$, получим $\log_4(4 + 7x) = \log_4(1 + 5x) + \log_4 4,$ воспользовавшись свойством логарифма (сумма логарифмов равна логарифму произведения подлогарифмических выражений: $\log_c a + \log_c b = \log_c ab$), получим уравнение $\log_4(4 + 7x) = \log_4((1 + 5x) \cdot 4),$ которое в свою очередь замечательно решается методом потенцирования, т.е. $4 + 7x = 4(1 + 5x).$ А это линейное уравнение, решив которое, получим $x = 0.$

Проверка: $\log_4(4+7\cdot 0)=\log_4(1+5\cdot 0)+1,\ \log_4 4=\log_4 1+1,\ 1=1$ - верно.

Ответ: 0.

Замечу, что часто перед применением какого-либо метода решений, необходимо преобразовать уравнение, применив различные свойства логарифмов. Предыдущий пример, тому подтверждение.

Метод подстановки.

Данный метод мы достаточно часто встречаем в математике, вспомните тригонометрические или показательные уравнения. Поэтому применение его при решении логарифмических уравнений я вам покажу на примере.

Пример 8: $\log_3^2 x-\log_3 x=2$.

В этом уравнении рациональней найти ОДЗ: $x>0.$

Пусть $\log_3 x=t$, тогда уравнение примет вид

$t^2-t=2$,

$t^2-t-2=0.$

$t_1=-1, t_2=2.$

Значит $\log_3 x=-1$ или $\log_3 x=2$. А это уравнения, которые мы решим, используя определение:

1) $\log_3 x=-1 \Rightarrow x=3^{-1} \Rightarrow x=\frac{1}{3}.$

2) $\log_3 x=2 \Rightarrow x=3^2 \Rightarrow x=9.$

Мы видим, что оба корня удовлетворяют ОДЗ, значит оба числа являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $\frac{1}{3}, 9.$

.Если в основании логарифма лежит выражение с переменной, то уравнение в общем виде будет выглядеть следующим образом:

$a\log_{g(x)}^2 f(x)+b\log_{g(x)} f(x)+c=0$, где $f(x)>0, g(x)>0, g(x)\neq 1, a, b, c - \text{числа}, a\neq 0.$

И опять, вы сами выбираете: ОДЗ или проверка.

Пример 9: $\log_7 x-\log_x 7=2{,}5$.

ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1. \end{cases}$

Приведём логарифмы к одному основанию – 7, пользуясь свойством перехода к новому основанию $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$, получим:

$\log_7 x-\frac{1}{\log_7 x}=\frac{5}{2}$, выполним подстановку $t=\log_7 x$, получим уравнение

$t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}$,

$2t^2-5t+2=0,$

$t_1=2, t_2=\frac{1}{2}.$

Значит,

развернуть таблицу

$\log_7 x=2$ или	$\log_7 x=\frac{1}{2}$.
$x=7^2,$	$x=7^{\frac{1}{2}},$
$x=49.$	$x=\sqrt{7}.$

Оба числа удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: $\sqrt{7}, 49.$

Метод логарифмирования.

Данный метод является “обратным” методу потенцирования, т. е. мы от уравнения без логарифмов переходим к уравнению, их содержащему.

$f(x)=g(x)\Rightarrow \log_{h(x)} f(x)=\log_{h(x)} g(x)$, при этом $f(x)>0, g(x)>0, h(x)>0, h(x)\neq 1.$

Этот метод обычно используется, если в уравнении есть показательные функции, логарифмы – в показателе. Рассмотрим этот метод на примере.

Пример 10: $x^{\log_3 x-4}=\frac{1}{27},$

ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1. \end{cases}$

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 3:

$\log_3(x^{\log_3 x-4})=\log_3\frac{1}{27},$ а теперь воспользуемся свойством логарифмов $\log_c a^p=p\log_c a$, получим

$(\log_3 x-4)\log_3 x=-3.$

Выполним подстановку $t=\log_3 x$, получим уравнение

$(t-4)t=-3,$

$t^2-4t+3=0,$

$t_1=1, t_2=3.$

Значит,

$\log_3 x=1$ или $\log_3 x=3,$.

$x = 3^1$, $\quad x = 3^3$,

$x = 3$. $\quad x = 27$.

Оба числа удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: 3, 27.

Этот пример показывает, что при решении логарифмических уравнений, возможна комбинация нескольких методов. А значит необходимо уметь пользоваться каждым из них. Научиться этому – теперь ваша задача.

Итак, сегодня мы с вами рассмотрели основные методы решения логарифмических уравнений:

- На основании определения логарифма.
- Метод потенцирования.
- Метод постановки.
- Метод логарифмирования.

Главным, по моему мнению, является метод, основанный на определении логарифма. Практически в каждом их других методов происходит “выход” на него. Кроме того, на примерах мы увидели, что все методы взаимосвязаны, в “чистом” виде при решении уравнений не используется ни один из них. Поэтому вам необходимо уметь пользоваться КАЖДЫМ!

Домашнее задание:

Для отработки навыков решения логарифмических уравнений, я вам предлагаю следующее домашнее задание. Уравнения являются базовыми, т. е. решать их должен уметь решать каждый .

№ п/п	Уравнения	Комментарии *(даётся для слабых учащихся)*
1	$\log_3(9+x)=4$	Пользуясь определением
2	$\log_{\frac{1}{7}}(7-3x)=-2$	Пользуясь определением
3	$\log_3(14-x)=\log_3 5$	Потенциирование
4	$\log_2(1+x)=\log_2 4$	Потенциирование
5	$\log_3(x+4)=\log_3(2x-12)$	Потенциирование
6	$\log_8(x^2+x)=\log_8(x^2-4)$	Потенциирование
7	$\log_4(8-5x)=2\log_8 3$	Применить свойства логарифмов и затем потенциировать
8	$\log_2(8+3x)=\log_2(3+x)+1$	Применить свойства логарифмов и затем потенциировать
9	$\log_{x+5} 4=2$	Пользуясь определением
10	$\log_8 2^{6x-3}=4$	Пользуясь определением, выход на показательное уравнение
11	$2^{\log(5x-3)}=4$	Показательное уравнение, выход на логарифмическое

развернуть таблицу

Зачёт

.Решение задач по теме “Логарифмические уравнения”.

Уравнения (примерные, зависит от математической подготовки учащихся).

Обязательный уровень		**Повышенный уровень**	
1	$\log_2(8+x)=3$	1	$\log_3^2(x-3)-\log_3(x-3)=0$
2	$\log_{\frac{1}{4}}(9-5x)=-3$	2	$\dfrac{1}{5-\lg x}+\dfrac{2}{1+\lg x}=1$
3	$\log_{13}(17-x)=\log_{13}12$	3	$\dfrac{\log_3^2 x}{\log\dfrac{x}{27}}-\dfrac{6-\log_3 x^5}{3-\log_3 x}=1$
4	$\log_9(x+6)=\log_9(4x-9)$	4	$\log_9(2x^2+9x+5)+\log_{\frac{1}{3}}(x+3)=0$
5	$\log_5(x^2+4x)=\log_5(x^2+11)$	5	$x^{5-\log_2 x-\log_x 2}=8$
6	$\log_2(4-x)=2\log_2 5$	6	$3\log_6\left(3-\dfrac{3}{2x+3}\right)=4\log_6\left(2+\dfrac{1}{x+1}\right)+3$
7	$\log_2(4+x)=\log_2(2-x)+2$	7	$\dfrac{2\log_2^2(\sin x)+3\log_2(\sin x)+1}{\log_3(-\cos x)}=0$
8	$\log_{x-1}25=2$	8	$\log_{0.2}\lvert 4x+9\rvert=-1$
9	$\log_{81}3^{2x+6}=4$	9	$1+\log_2(9x^2+5)=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{8x^4+14}$. Найти все корни, принадлежащие отрезку $\left[-1;\dfrac{8}{9}\right]$. ЕГЭ, 2013
10	$3^{\log_{27}(3x-2)}=7$	10	$\log_5(\cos x-\sin 2x+25)=2$. Найти все корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\dfrac{7\pi}{2}\right]$. ЕГЭ, 2012.
11	$\lg^2 x-3\lg x+2=0$	11	$6^{\log_6^2 x}+x^{\log_6 x}=12$
12	$\lg^2 x=\lg(100x)$	12	$\log_9(3^x+2x-20)=x-x\log_9 3$

Тест к зачёту.

№ п/п		Задание	Ответ
1		Найдите корень уравнения $\log_2(7+x)=3.$.	
2		Найдите корень уравнения $\log_2(15+x)=\log_2 3.$.	
3		Найдите корень уравнения $\log_4(x+8)=\log_4(5x-4).$.	
4		Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{4}}(9-5x)=-3.$.	
5		Найдите корень уравнения $\log_2(18-6x)=4\log_2 3.$.	
6	**Обязательный уровень**	Найдите корень уравнения $\log_4(x^2+x)=\log_4(x^2+6).$.	
7		Найдите корень уравнения $\log_2(5+2x)=\log_2(1-2x)+2.$.	
8		Найдите корень уравнения $\log_{x-4} 27=3$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.	
9		Найдите корень уравнения $\log_{16} 2^{5x-6}=4$.	
10		Найдите корень уравнения $2^{\log_{\,}(4x+50}=7.$	
11		Решить уравнение $\log_2(5+3\log_2(x-3))=3.$	
12		Решить уравнение $\log_{2x+1}(2x^2-8x+15)=2.$	
13		Решить уравнение $16^{\log_4(1-2x)}=5x^2-5.$	
14		Решить уравнение $2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2=0.$	
15		Решить уравнение $\log_2 x+\log_3 x=1.$	
16	**Повышенный уровень (решать по выбору)**	Решить уравнение $\log_3\frac{x-3}{x+3}=1.$	Развёрнутое решение
17		Решить уравнение $\log_4(x^2-4x+1)-\log_4(x^2-6x+5)=-\frac{1}{2}$.	
18		Решить уравнение $(x+3)^{\log_{3}(x+3)}=3.$ Найти произведение корней.	