Профессиональное образовательное учреждение

«КОЛЛЕДЖ БИЗНЕС-МЕНЕДЖМЕНТА,

ЭКОНОМИКИ И ПРАВА»

Дата: 15.05.2020г.
Специальность:
Курс: 2-й
Дисциплина: Математика
Преподаватель: Гаджиева А.Х.

Лекция №4

Тема: «Первоопределение первообразной функции и неопределенного интеграла;

План:

1. **Из истории интегрального исчисления. О происхождении терминов и обозначений.**
2. **Определение первообразной, её основное свойство, правила нахождения первообразных.**
3. **Понятие неопределенного интеграла, его свойства.**
4. **Таблица простейших интегралов.**

1. История понятия интеграла тесно связана с задачами нахождения квадратур. Задачами о квадратуре той или иной плоской фигуры математики Древней Греции и Рима называли задачами, которые мы сейчас относим к задачам на вычисление площадей.

Многие значительные достижения математиков Древней Греции в решении таких задач связаны с применением метода исчерпывания, предложенным Евдоксом Книдским. С помощью этого метода Евдокс доказал:

1. Площади двух кругов относятся как квадраты их диаметров.

2. Объём конуса равен 1/3 объёма цилиндра, имеющего такие же высоту и основание.

Метод Евдокса был усовершенствован Архимедом и были доказаны такие вещи:

1. Вывод формулы площади круга.

2. Объем шара равен 2/3 объема цилиндра.

Все достижения были доказаны великими математиками с применением интегралов.

Символ $\int$ введен Лейбницем в 1675 г. Этот знак является изменением латинской буквы S. Само слово «*интеграл*» придумано Бернулли в 1690 г. Оно происходит от латинского integro, которое переводится, как приводить в прежнее состояние, восстанавливать. Действительно, операция интегрирования обратная операции дифференцирования т.е. для того, чтобы проверить правильность нахождения интеграла необходимо продифференцировать ответ и получить подынтегральную функцию. Другими словами, интегральное исчисление решает задачу: по заданной производной или дифференциалу неизвестной функции требуется определить эту функцию. Отсюда можно сделать вывод, который мы запишем в виде определения.

2. **Определение 1**: *Функция F(x) называется первообразной для функции f(x) на отрезке* [a;b], *если во всех точках этого отрезка выполняется равенство* $F'(x)$ *= f(x) или dF(x)=f(x)dx*

Так, функция $F(x) = x^m$ является первообразной для $f(x)=mx^{m-1}$, так как

$$(x^m)'=mx^{m-1}.$$

Точно также функция F(x) =ln x есть первообразная для *f(x)*= $\frac{1}{x}$, так как

$$(\ln x)'= \frac{1}{x}.$$

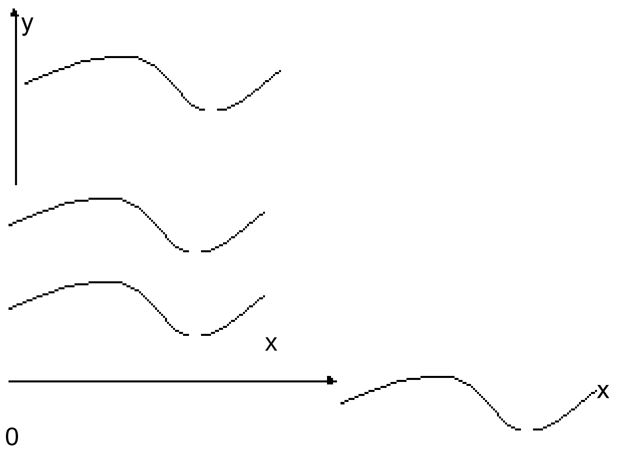
Признак постоянства функции:

Если F'(x)=0 на некотором промежутке I, то функция F – постоянна на этом промежутке, т.е. F(x)=C.

Все первообразные функции f можно записать в одну формулу, которую называют общим видом первообразных для функции f. Запишем это в виде теоремы.

Теорема: *Любая первообразная для функции f на промежутке I может быть записана в виде F(x)+C, где F(x) – одна из первообразных для функции f(x) на промежутке I, C – произвольная постоянная.*

Этому свойству можно придать геометрический смысл: графики любых двух первообразных для функции f получаются друг из друга параллельным переносом вдоль оси Oy.



Три правила нахождения первообразных

Правило №1: Если F есть первообразная для функции f, а G – первообразная для g, то F+G – есть первообразная для f+g.

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f + g$$

Правило №2: Если F – первообразная для f, а k – постоянная, то функция kF – первообразная для kf.

(kF)’ = kF’ = kf

Правило №3: Если F – первообразная для f, а k и b– постоянные ($k \neq 0$), то функция

$\frac{1}{k}F\left(kx+b\right)$ - первообразная для f(kx+b).

$$\left(\frac{1}{k}F\left(kx+b\right)\right)' = \frac{1}{k}F'\left(kx+b\right)k = f\left(kx+b\right)$$

3. Вернемся к теореме 1 и выведем новое определение.

Определение 2: *Выражение F(x) + C, где C - произвольная постоянная, называют неопределенным интегралом и обозначают символом*

$$\int f(x)dx$$

Из определения имеем:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (1)$$

Неопределенный интеграл функции f(x), таким образом, представляет собой множество всех первообразных функций для f(x).

В равенстве (1) функцию f(x) называется *подынтегральной функцией*, а выражение f(x)dx– *подынтегральным выражением*, переменную x – *переменной интегрирования*, слагаемое C - *постоянной интегрирования*.

Интегрирование представляет собой операцию, обратную дифференцированию. Для того чтобы проверить, правильно ли выполнено интегрирование, достаточно продифференцировать результат и получить при этом подынтегральную функцию.

Свойства неопределенного интеграла.

Опираясь на определение первообразной, легко доказать следующие *свойства неопределенного интеграла*

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, то есть если $F'\left(x\right)$ = f(x), то

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = f(x)$$

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению

$$d\int f(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)'dx = \left(F(x) + C\right)'dx = f(x)dx$$

1. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная

$$\int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + C$$

1. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен алгебраической сумме их интегралов

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, то есть если a=const, то

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

Интегралы эти принято называть *табличными*.

Домашнее задание;

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C$.

2. $\int x^{a} dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, \ (a \neq -1)$.

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int a^{x} dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C$.

5. $\int e^{x} dx = e^{x} + C$.

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$.

Выучить таблицу основных интегралов