Профессиональное образовательное учреждение
«КОЛЛЕДЖ БИЗНЕС-МЕНЕДЖМЕНТА,
ЭКОНОМИКИ И ПРАВА»

Дата: 17.04.2020г.
Специальность:
Курс: 2-й
Дисциплина: Математика
Преподаватель: Гаджиева А.Х.

Лекция №2:

Тема для изучения : Дифференциалы высших порядков

План лекции:

1. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях
2. **Применение производной к исследованию функций**

Рассмотрим дифференцируемую функцию независимой переменной $y = f(x)$. Дифференциал этой функции $dy = f'(x)dx$ зависит от x и $dx = x$. Приращение dx от x не зависит, так как приращения в данной точке x можно выбирать независимо от этой точки. Рассматривая $dy = f'(x)dx$ только как функцию от x (то есть считая dx постоянным), можно найти дифференциал этой функции. Дифференциал от дифференциала данной функции $y = f(x)$ называется ее вторым дифференциалом или дифференциалом второго порядка и обозначается символом d^2y или $d^2 f(x)$. Таким образом, по определению $d^2y = d(dy)$. Вычислим второй дифференциал функции $y = f(x)$.
$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2$ Итак, $d^2y = f''(x)dx^2$

Аналогично определяются и вычисляются дифференциалы третьего, четвертого и так далее порядков. Вообще, дифференциалом n – го порядка или n-м дифференциалом функции $y = f(x)$ называется дифференциал от ее (n-1) – го дифференциала: $d^ny = d(d^{n-1}y)$. Легко установить, что $d^ny = f^{(n)}(x)dx^n$. Дифференциал dy называют дифференциалом первого порядка. Из последней формулы следует $f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$.
Замечание. Для сложной функции форма дифференциала d^ny при n>1 не обладает свойством инвариантности, а значит и $f^{(n)}(x) \neq \frac{d^ny}{dx^n}$. Однако часто и для сложной функции $f^{(n)}(x)$ обозначают $\frac{d^ny}{dx^n}$, понимая $\frac{d^ny}{dx^n}$ не как отношение дифференциалов, а как символ, обозначающий $f^{(n)}(x)$.

Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема Ферма

Пусть функция $y = f(x)$ определена в интервале (a, $в$) и принимает в точке с этого интервала наибольшее или наименьшее на (a, $в$) значение. Если существует $f'(c)$, то $f'(c) = 0$.

Доказательство. Пусть, например, $f(c) = M$ – наибольшее значение функции в интервале (a, $в$) и существует $f'(c)$. По определению производной $f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$. При любом знаке x $f(c+x)-f(c)\leq 0$, так как $f(c)$ – наибольшее значение функции в (a, $в$).

Если $x>0$, то $\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\leq 0$ и, следовательно, $f'(c)\leq 0$. Если же $x<0$, то $\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\geq 0$ и $f'(c)\geq 0$. Следовательно, $f'(c)=0$.

Геометрически теорема означает, что касательная, проведенная к графику функции в точке (c; $f(c)$), параллельна оси Ox.

Теорема Ролля

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и $f(a) = f(b) = 0$. Тогда ее производная $f'(x)$ обращается в нуль хотя бы в одной точке c(a, b).

Доказательство. По условию функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, поэтому она достигает на $[a, b]$ своего наибольшего M и наименьшего m значений. Если $M = m$, то функция постоянна на $[a, b]$ и ее производная $f'(x) = 0$ во всех точках (a, b). Пусть теперь M m, тогда хотя бы одно из этих чисел, например, m 0. Поэтому существует точка c(a, b) такая, что $f(c) = m$. Следовательно, по теореме Ферма $f'(c) = 0$.

Геометрически теорема означает, что если функция $y = f(x)$ удовлетворяет теореме Ролля, то найдется хотя бы одна точка $(c; f(c))$, где $c(a;b)$, такая, что касательная к графику функции, проведенная в этой точке, параллельна оси Ox.

Теорема Лагранжа

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема в интервале (a, b). Тогда существует хотя бы одна точка $c(a, b)$, для которой выполняется условие: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.

Доказательство. Составим уравнение хорды AB, соединяющей точки графика функции $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$:

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a}.$$

Отсюда ордината хорды y=$f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$. Рассмотрим функцию $F(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)\right]$. Функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), так как функция f(x) непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a,b).

$$F(b)=f(b)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(b-a)\right]=f(b)-f(a)-f(b)+f(a)=0;$$

$$F(a)=f(a)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(a-a)\right]=0$$

. Таким образом, функция F(x) удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Поэтому существует такая точка c(a, *b*), что $F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$, откуда получаем утверждение теоремы. Геометрически теорема Лагранжа означает, что существует хотя бы одна точка с (*a, b*) такая, что касательная, проведенная к графику функции в точке (*c; f* (*c*)), параллельна хорде АВ.

Теорема Коши

Если функции *f* (*x*) и φ (*x*) непрерывны на отрезке [*a, b*] и дифференцируемы в интервале (*a, b*), причем $\varphi'(x) \neq 0$, то существует точка *c* (*a, b*) такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

F(*x*) = [*f*(*x*)-*f*(*a*)] – $\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$. [φ (*x*)-φ (*a*)].

Легко проверить, что эта функция удовлетворяет теореме Ролля (аналогично тому, как это было сделано в предыдущей теореме). Следовательно, существует точка *c* (*a, b*.) такая, что $F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} . \varphi'(c) = 0$

Отсюда получаем утверждение теоремы.

Замечание.

Равенства $f(b)-f(a) = (b-a).f'(c)$ и

$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$ называются соответственно формулами Лагранжа и Коши.

Теорема Лопиталя (Правило Лопиталя)

Пусть $f(x) и \varphi(x)$ - функции, непрерывные на [*a, b*], дифференцируемые в(*a, b*); $\varphi'(x) \neq 0$ при всех х (*a, b*) и *f* (*a*) = φ (*a*) = 0.

Тогда, если существует $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то существует $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$,причем $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Доказательство. Возьмем на [*a, b*] какую-нибудь точку х $\neq$ а. Применяя формулу Коши, получим $\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$, где *c* (*a; x*).

По условию *f* (*a*) = φ (*a*) = 0, значит $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$. Если *x* $\to$ *a,* то и *c* $\to$ *a,* так как *c* (*a, x*).

При этом, если существует $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ =*A*, то существует и $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ = *A*.

Поэтому $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \lim_{c\to a} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$.

Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема имеет место и в том случае, если функции f(x) и φ (x)не определены при *x* = *a,* но $\lim_{x\to a}$ *f*(*x*) = 0, $\lim_{x\to a} \varphi$ (*x*) = 0.

Замечание 2. Если $f'(a) = \varphi'(a) = 0$ и производные $f'(x) и \varphi'(x)$ удовлетворяют всем тем условиям, которые наложены на функции в теореме Лопиталя, то применяя правило Лопиталя к отношению $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, получаем $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$ и так далее. Теорема имеет место и в том случае, если f(x) и φ (x) не определены при $x = a$, но $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} \varphi(x) = \infty$, а также в случае $a = \infty$.

Таким образом, правило Лопиталя можно применять к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Применение производной к исследованию функций

п. 1. Интервалы монотонности. Экстремумы

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на некотором промежутке, если для любых значений $x_2>x_1$ этого промежутка выполняется условие $f(x_2) > f(x_1)$($f(x_2) < f(x_1)$).

Функция $y = f(x)$ имеет максимум (минимум) в точке x_0, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех x, принадлежащих этой окрестности, выполняется условие $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$, x x_0.

Максимумы и минимумы функции называются ее экстремумами.

Интервал, на котором функция возрастает или убывает, называется интервалом монотонности функции.

Теорема 1. (необходимое условие монотонности функции). Если дифференцируемая в интервале (a, b) функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на этом интервале, то ее производная в каждой точке (a, b) $f'(x) \geq 0$ $\left(f'(x) \leq 0\right)$.

Доказательство. Пусть $y = f(x)$ – дифференцируема и возрастает на (a, b). Пусть точки x и x+Δx принадлежат (a, b). Если $\Delta x >0$, то $f(x+\Delta x) > f(x)$; если $\Delta x<0$, то $f(x+\Delta x) < f(x)$. В обоих случаях $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0$. Переходя к пределу в последнем неравенстве при $\Delta x \to 0$ и учитывая, что функция дифференцируема, получаем $\lim_{x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \geq 0$.

Аналогично доказывается теорема в случае убывающей функции.

Теорема 2. (достаточное условие монотонности функции). Если непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $y = f(x)$ в каждой точке интервала (a, b) имеет положительную (отрицательную) производную, то эта функция возрастает (убывает) на отрезке $[a, b]$.

Доказательство. Пусть $f'(x)>0$ для всех x (a,b). Рассмотрим два произвольных значения $x_2 > x_1$, принадлежащих $[a, b]$. по формуле Лагранжа $f(x_2)-f(x_1) = (x_2 - x_1)\cdot f'(c)$, $x_1<c < x_2$. $f'(c) > 0$ и $x_2 - x_1 > 0$, поэтому $f(x_2)-f(x_1) >0$, откуда $f(x_2) > f(x_1)$, то есть функция f(x) возрастает на отрезке $[a, b]$. Аналогично доказывается вторая часть теоремы.

Теорема 3. (необходимый признак существования экстремума функции). Если дифференцируемая в точке с функция $y = f(x)$ имеет в этой точке экстремум, то $f'(c)=0$.

Доказательство. Пусть, например, функция $y = f(x)$ имеет в точке с максимум. Это означает, что существует такая проколотая окрестность точки с, что для всех точек x этой окрестности выполняется $f(x) < f(c)$, то есть $f(c)$ – наибольшее значение функции в этой окрестности. Тогда по теореме Ферма $f'(c)=0$.

Аналогично доказывается случай минимума в точке с.

Замечание. Функция может иметь экстремум в точке, в которой ее производная не существует. Например, функция $y = |x|$ имеет минимум в точке x = 0, хотя $y'(0)$ не существует. Точки, в которых производная функции равна нулю или не существует, называются критическими точками функции. Однако не во всех критических точках

функция имеет экстремум. Например, функция $y = x^3$ не имеет экстремумов, хотя ее производная $y'(0) = 0$.
Теорема 4. (достаточный признак существования экстремума). Если непрерывная функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$ во всех точках некоторого интервала, содержащего критическую точку С (за исключением, может быть, самой этой точки), и если производная $f'(x)$ при переходе аргумента слева направо через критическую точку С меняет знак с плюса на минус, то функция в точке С имеет максимум, а при перемене знака с минуса на плюс – минимум.
Замечание. Если производная $f'(x)$ не меняет знака при переходе аргумента через критическую точку, то функция в этой точке не имеет экстремума.

План исследования функции и построение графика:

Исследование функции удобно проводить по следующему плану.
1. Область определения функции.
2. Точки пересечения графика функции с осями координат.
3. Четность, нечетность функции.
4. Исследование функции на непрерывность. Вертикальные асимптоты.
5. Невертикальные асимптоты.
6. Интервалы монотонности. Экстремумы.
7. Интервалы выпуклости, вогнутости. Точки перегиба.
8. Дополнительные точки, (по мере необходимости).
9. Построение графика.

Вопросы для закрепления изученного материала:

1.**Знать некоторые теоремы о дифференцируемых функциях**

2. **План исследования функции и построение графика**