ПОУ «Колледж бизнес-менеджмента, экономики и права»

Дата: 10.04.2020г.
Специальность:
Курс: 2-й
Дисциплина: Математика
Преподаватель: Гаджиева А.Х.

Лекция №1:

Тема для изучения : «Производная»

План лекции:

1. Дать определение производной
2. Геометрический и физический смысл производной
3. Основные правила дифференцирования

Основные понятия

Пусть дана функция $y = f(x)$. Рассмотрим два значения ее аргумента: исходное x_0 и новое x. Разности $x = x\text{-}x_0$ и $y = f(x)\text{-}f(x_0) = y\text{-}y_0$ называются соответственно приращением аргумента и приращением функции в точке x_0. Очевидно, что $x = x_0+x$, $y = y_0+y$, $y = f(x_0+x)\text{-}f(x_0)$. В дальнейшем будем считать значение x_0 фиксированным, а x – переменным. При этом x и y являются переменными величинами.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, если этот предел существует.

Производная обозначается $y'(x_0)$ или $f'(x_0)$. Таким образом, $y'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Пусть X = $\{x\}$ - множество всех таких x, для которых существует $y'(x)$. Очевидно, что $y'(x)$ является функцией, определенной на множестве X.

Нахождение производной функции называется дифференцированием этой функции. Функция, имеющая производную в точке x_0, называется дифференцируемой в этой точке. Функция, дифференцируемая в каждой точке интервала (a, b), называется дифференцируемой на интервале (a, b).

Геометрический смысл производной. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, тогда угловой коэффициент касательной к графику функции, проведенной в точке $(x_0, f(x_0))$ равен $y'(x_0)$.

Физический смысл производной. Пусть материальная точка движется прямолинейно неравномерно по закону $S = f(t)$, где t – время, S – путь, проходимый точкой за время t. Тогда скорость точки в момент времени t равна: $V = S'(t)$.

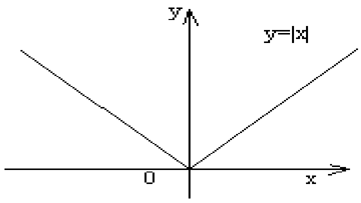
Теорема (о связи дифференцируемости и непрерывности). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

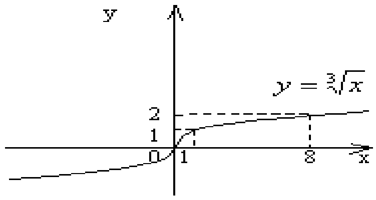
Доказательство. Пусть аргумент x получает в точке x_0 приращение x 0. Ему соответствует некоторое приращение функции y. Вычислим предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

а это и означает непрерывность функции в точке x_0.

Заметим, что обратная теорема неверна: существуют непрерывные функции, которые в некоторых точках не дифференцируемы. Примерами могут служить функции $y = x$ и $y = \sqrt[3]{x}$ в точке $x = 0$. В обоих случаях $y'(0)$ не существует.





Заметим, что график $y = x$ в точке $x = 0$ не имеет касательной, а график $y = \sqrt[3]{x}$ в точке x=0 имеет вертикальную касательную – ось *Oy*.

Можно показать, что для того, чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы ее график имел невертикальную касательную в точке $(x_0, f(x_0))$.

Формулы вычисления производной некоторых элементарных функций:

1. C' = 0, где C – константа.
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$, где n – натуральное число
3. $(a^x)' = a^x \ln a$, где a>0, a 1. В частности, $(e^x)' = e^x$
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, где a>0, a 1. В частности, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
5. (sinx)' = cosx
6. (cosx)' = -sinx

Основные правила дифференцирования.

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – функции, дифференцируемые в точке x. Тогда :

$$(u+v)' = u'+v'$$

$$(uv)' = u'v+uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Следствием последних трех соотношений являются следующие два: $(cu)' = cu'$, где c – константа, и $(u-v)' = u'-v'$

Используя правило нахождения производной частного, легко получаются формулы: $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ и $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, которые выполняются для любого x, при котором существует tg$x$ и cos$x$ *0* или существует ctg$x$ и sin$x$*0*.

формулы

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$(x^n)' = nx^{n-1}$ д

Таблица формул дифференцирования
В таблице приняты обозначения: c, n – любые действительные числа; *a* – любое положительное действительное число, кроме единицы. *u*= *u*(*x*) – функция, дифференцируемая в точке x, *y* = *f* (*u*) – функция, дифференцируемая в соответствующей точке u. Таблица составлена на основании формул дифференцирования основных элементарных функций и теоремы о производной сложной функции.

1. 1.$(c)' = 0$

   . $(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$,
2. **$(u^n)' = nu^{n-1}u'$**
3. . $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
4. **$(a^u) = a^u \ln a u'$**

   $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$

   . $(e^u) = e^u u'$

   $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2}u'$
5. $(\log_a u)' = \frac{1}{u\ln a}u'$

   12.$(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2}u'.$

   $(\ln u)' = \frac{1}{u}\cdot u'$

   6. $(chu)' = shuu'$

   7.$(\sin u)' = \cos uu'$

8. $(\cos u)' = -\sin u\ u'$

Производные высших порядков

Предположим, что функция $y = f(x)$ дифференцируема в некотором интервале (a, $в$). Тогда ее производная $f'(x)$ в этом интервале является функцией x. Пусть эта функция также имеет производную в (a, $в$). Эта производная называется второй производной или производной второго порядка функции $y = f(x)$и обозначается y'' или $f''(x)$.

Таким образом, $f''(x) = (f'(x))'$. При этом $f'(x)$ называется первой производной или производной первого порядка функции $f(x)$.

Аналогично определяются производные третьего, четвертого и так далее порядков.

Вообще, производной n –го порядка функции $y = f(x)$ в точке x называется первая производная производной (n-1)-го порядка функции $y = f(x)$ при условии, что в точке x существуют все производные от первого до n –го порядков. Обозначение: $y^{(n)}$ или $f^{(n)}(x)$. Таким образом, $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$.

Производные порядка выше первого называются производными высших порядков.

Механический смысл второй производной.

Пусть материальная точка движется прямолинейно неравномерно по закону $S = f(t)$, где t-время, $f(t)$ – путь, пройденный за время t. Из физики известно, что при этом ускорение точки в момент времени t равно производной скорости по t. Таким образом, ускорение $w(t) = v'(t) = S''(t)$ равно второй производной пути по времени.

Дифференцирование функций, заданных параметрически

Пусть функция y от x задана параметрическими уравнениями:

$x = x(t)$, $y = y(t)$, $t(;)$.

Предположим, что функции $x(t)$, $y(t)$, имеют производные на (;) и функция $x(t)$ имеет обратную функцию $t = (x)$, которая также имеет производную в соответствующих точках x. Тогда определенную параметрическими уравнениями функцию y от x можно рассматривать как сложную функцию $y = y(t)$, $t = (x)$, t – промежуточный аргумент. По правилу дифференцирования сложной функции получаем $y'_x = y'_t\, t'_x = y'_t\, '_x$. По теореме о дифференцировании обратной функции $'_x = \frac{1}{x'_t}$. Учитывая это, получаем $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Если существует y''_x, то рассуждая аналогично, получаем

$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$ Вообще, $y^{(n)}_x = \frac{(y^{(n-1)}_x)'_t}{x'_t}$ при условии, что все производные существуют.

Пример. $x = \cos^3 t$, $y=\sin^3 t$. Вычислить y''_x. $x'_t = -3\cos^2 t \sin t$, $y'_t=3\sin^2 t\cos t$, поэтому

$y'_x = \frac{3\sin^2 t\cos t}{-3\cos^2 t\sin t} = -tgt$. $(y'_x)'_t = (-tgt)'_t = -\frac{1}{\cos^2 t}$. Тогда $y''_x = \frac{-1/\cos^2 t}{-3\cos^2 t\sin t} = \frac{1}{3\sin t\cos^4 t}$.

Дифференциал функции

Рассмотрим функцию $y = x^3$. Дадим некоторому значению аргумента x 0 приращение x 0, тогда функция получит соответствующее приращение y. Вычислим его.

$y = (x+x)^3-x^3 = x^3+3x^2x+3x(x)^2+(x)^3-x^3 = =3x^2x+(3x(x)^2+(x)^3)$.

Приращение функции можно рассматривать как сумму двух слагаемых: $3x^2x$ – линейного относительно x и $3x(x)^2+(x)^3$ – нелинейного относительно x. При $x0$ оба слагаемых, очевидно, являются бесконечно малыми. Однако второе слагаемое является бесконечно малой более высокого порядка, чем первое.

Действительно, $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3)}{3x^2\Delta x} = \frac{1}{3x^2}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}(3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2) = 0$.

Обозначим $3x(x)^2+(x)^3 = 0(x)$. Таким образом, $y = 3x^2x+0(x)$. При малых x получаем: $y3x^2x$.

Свойства дифференциала

1. Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые в точке x функции. Тогда в точке x имеют место следующие формулы:

$d(u \pm v) = du \pm dv$

$d(uv) = udv+vdu$

$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$ (при условии, что $V(x)$ 0)

Эти формулы следуют из определения дифференциала и свойств производной.

Пример. $y = x^3\sin 2x$. Найти dy.

$dy = (3x^2\sin 2x+2x^3\cos 2x)dx$

2. Инвариантность формы дифференциала

Получена формула: $dy = f'(x)\,dx$ для функции $y = f(x)$, где x – независимая переменная. Пусть теперь $y = f(x)$ и $x = (t)$, то есть y является сложной функцией t: y $= f((t))$. Тогда $dy = y'_t dt$. По правилу дифференцирования сложной функции имеем $y'_t = y'_x x'_t$. Отсюда $dy = y'_x x'_t dt = y'_x dx = f'(x)dx$, так как $x'_t dt = dx$. Таким образом, дифференциал сложной функции $y = f(x)$, где $x = (t)$, имеет такой же вид $dy = f'(x)\,dx$, как и дифференциал функции $y = f(x)$, где x – независимая переменная.

Это свойство дифференциала сложной функции называется инвариантностью формы дифференциала.

Вопросы для закрепления изученного материала:

- Дать определение производной
- Дать определение геометрическому и физическому смыслу производной
- Перечислить основные правила дифференцирования
- Решить примеры:

Вариант 1

Найдите производную функции:

1. $y = x^3 - 2x^2 + x + 2;$

2. $y = \sqrt{x}\,(2\sin x + 1);$

3. $y = \frac{1}{x^2};$

4. $y = \frac{1}{\cos x};$

5. $y = \frac{3x^2 - 2}{x^3};$

6. $y = \operatorname{tg} x + \frac{1}{x}.$